SALESIANOS PALMA DEL RÍO	**Examen de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II** **Análisis Matemático**	Año 2009-2010 Curso 2º A bachillerato 18-05-2010

Examen resuelto

1.- Sea la función definida mediante $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x \leq 0 \\ x^3 - x + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) **(1 punto)** ¿Es f continua en x = 0? ¿Es continua en su dominio?
b) **(1 punto)** ¿Es f derivable en x = 0? ¿Es derivable en su dominio?
c) **(1 punto)** Estudia la monotonía y los extremos relativos de f. Estudia la curvatura de f
d) **(1 punto)** A partir de los datos anteriores dibuja la gráfica de f

SOLUCIÓN:

a) Continuidad en x = 0:

I - ¿Existe f(0)? $f(0) = e^{-0} = 1$.
II- ¿Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$?. Para saberlo calculamos los límites laterales:

$$\left. \begin{array}{r} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^3 - x + 1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

III- Comprobamos que además la función y el límite toman el mismo valor.

Por tanto concluimos que f es continua en x = 0

Continuidad en su dominio: las funciones $f_1 = e^{-x}$ y $f_2 = x^3 - x + 1$, son funciones continuas en ℝ, por serlo respectivamente la función exponencial y los polinomios, en particular serán continuas sometidas a las restricciones de la función a trozos, por tanto, podemos concluir que f es continua en su dominio.

b) Derivabilidad en x = 0.

Puesto que la función es continua, podemos plantear el estudio de la derivabilidad a partir del cálculo de la derivada. La función derivada, si existe, es igual a:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si \quad x \leq 0 \\ 3x^2 - 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en x = 0 debe ser f'(0⁻) = f'(0⁺).

$$\left. \begin{array}{r} f'(0^-) = \left[-e^{-x}\right]_{x=0} = -1 \\ f'(0^+) = \left[3x^2 - 1\right]_{x=0} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = -1$$ ==> f es derivable en x = 0

Derivabilidad en su dominio:

$-e^{-x}$ es una función derivable en ℝ, en particular lo será en (-∞, 0)
x^3 - x + 1 es una función derivable en ℝ, en particular lo será en (0, ∞)

Por tanto f es derivable en todo su dominio.

c) Monotonía y extremos relativos.

Como la función es derivable en todo su dominio, se cumple que:

- f es creciente ⇔ f' >0
- f es decreciente ⇔ f' < 0
- f tiene extremos relativos ⇔ f' = 0

Estudiamos el signo de f'

$e^{-x} > 0$ para cualquier valor de x, por tanto $-e^{-x} < 0$ para cualquier x ∈ ℝ (*)

$-\infty < x < \infty$
$(e^{-x})' < 0$

Para el otro tramo resolvemos $3x^2 - 1 = 0$, que nos da $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Estudiamos el signo en las regiones que resultan y tenemos: (**)

$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \infty$
$(x^3 - x + 1)' > 0$	$(x^3 - x + 1)' < 0$	$(x^3 - x + 1)' > 0$

Teniendo ahora en cuenta (*), (**) y las regiones de definición de cada tramo, resulta finalmente que:

$-\infty < x \leq 0$	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \infty$
$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Obsérvese que $f'(0) = -1$ (y por tanto negativo) y que $f'(1/\sqrt{3}) = 0$, por lo que resumiendo:

$\boxed{\text{f(x) es decreciente en } (-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}}) \text{, creciente en } (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty) \text{ y tiene un mínimo relativo en } x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

	Examen de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II **Análisis Matemático**	Año 2009-2010 Curso 2º A bachillerato 18-05-2010

Curvatura:

Estudiaremos el signo de la segunda derivada. Si existe f'' vendrá dada por:

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x < 0 \\ 6x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Al igual que para la monotonía estudiamos el signo para cada uno de los tramos:

$e^{-x} = 0$ no tiene solución y resulta una sola región para el signo (*):

$-\infty < x < \infty$
$e^{-x} > 0$

$6x = 0 \Rightarrow x = 0$, por tanto tenemos dos regiones (**):

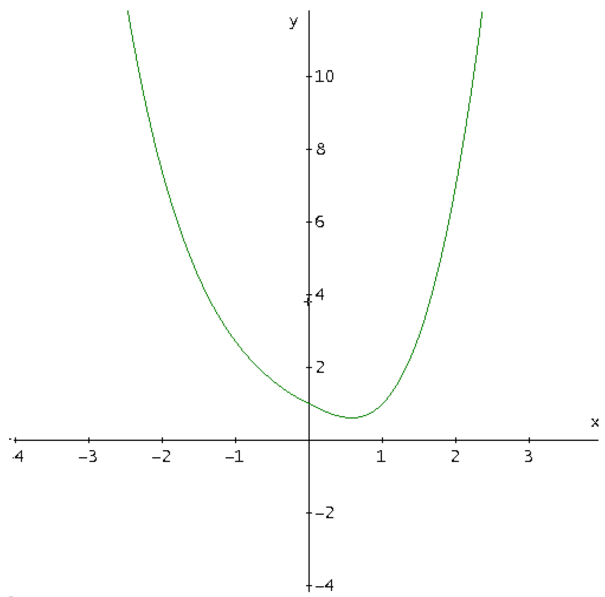
$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$6x < 0$	$6x > 0$

Teniendo ahora en cuenta (*), (**), y las regiones de definición vemos que la segunda derivada toma siempre valores positivos (observamos también que la segunda derivada no existe en x = 0), por tanto:

$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$f''(x) > 0$	$f''(x) > 0$

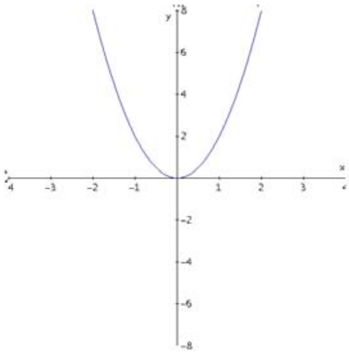
Por tanto la función es cóncava vista desde arriba en todo $\mathbb{R}$ excepto en x = 0, donde su curvatura no está definida, por presentar la segunda derivada una discontinuidad.

d) Gráfica de la función:



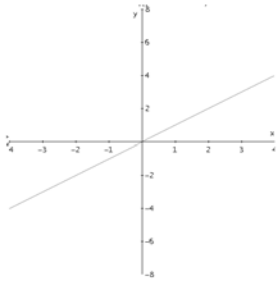
	Examen de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II **Análisis Matemático**	Año 2009-2010 Curso 2º A bachillerato 18-05-2010

2.- La función correspondiente a la siguiente gráfica:

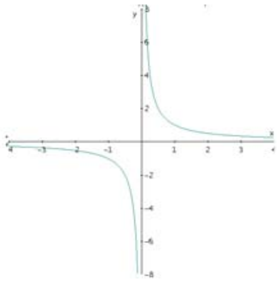


Es la derivada de una de las tres funciones siguientes:

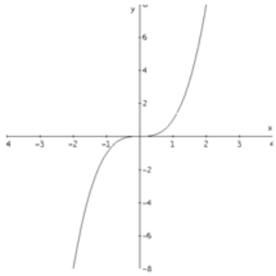
a)



b)



c)



(1 punto) Contesta razonadamente cuál es la opción correcta.

SOLUCIÓN:

La primera gráfica es la derivada de la función c), ya que observamos la siguiente correspondencia entre el signo de la derivada y el signo de la función c)

$-\infty < x < 0$	$f' > 0$	f creciente
$x = 0$	$f' = 0$	f tiene pendiente nula
$0 < x < \infty$	$f' > 0$	f creciente

Esta correspondencia también podría observarse entre la función derivada y la gráfica correspondiente a la función a), pero hay que descartarlo, ya que la función a) es una línea recta, su pendiente es constante, y su derivada también sería una constante y no una parábola, por tanto:

$$\boxed{\text{La primera gráfica es la derivada de la función c)}}$$

3.- Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$

a) **(1 punto)** Determina el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función f tiene un máximo en x = 1 y que pasa por el punto cuyas coordenadas son (1 , 2)

b) **(1 punto)** Para a = b = 1, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

SOLUCIÓN:

a) Puesto que *f(x)* tiene un máximo en *x* = 1 tiene que cumplirse *f'(1) = 0*

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$$
$$f'(1) = 3a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 3a + 2b = -1$$

Como pasa por el punto (1,2) debe cumplirse que *f*(1) = 2:

$$f(1) = a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

Y uniendo las dos condiciones obtenemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{ll} 3a + 2b & = -1 \\ a + b & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

La solución es a = -3 , b = 4

b) En este caso $f(x) = x^3 + x^2 + x$

La ecuación de la recta tangente tendrá la forma $y = ax + b$

- Su pendiente vendrá dada por $a = f'(0)$

$$f'(0) = [3x^2 + 2x + 1]_{x=0} = 1$$

- Para la ordenada en el origen tenemos en cuenta que pasa por el punto (0, f(0))

$$f(0) = [x^3 + x^2 + x]_{x=0} = 0$$

$$y = x + b \Rightarrow 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0$$

Por tanto, la ecuación de la recta que se pide es: $y = x$

4.- Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo (kg) de fresas depende del precio de vente de acuerdo con la función

$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Siendo B(x) el beneficio por kg y x el precio de cada kg, ambos expresados en euros.

a) **(1,25 puntos)** ¿Entre qué precios se producen beneficios para el almacenista?

b)**(1,25 puntos)** ¿Qué precio maximiza los beneficios?

c) **(0,5 puntos)** Si en el almacén tiene 10000 kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total máximo que podrá obtener?

SOLUCIÓN:

a) Los precios que producen beneficios para el almacenista son aquellos que hagan que la función B(x) tome valores positivos, por tanto estudiamos el signo de B(x)

Se trata de un polinomio, por tanto de una función continua, y el signo sólo podrá cambiar en aquellos valores de x que hagan cero el polinomio.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

Esto nos da tres regiones en las que el signo permanece constante:

$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$B(0) = -3 \Rightarrow B(x) < 0$	$B(2) = 1 \Rightarrow B(x) > 0$	$B(10) = -63 \Rightarrow B(x) < 0$

Por tanto, se producen beneficios para los precios comprendidos entre 1 y 3 euros

b) Para calcular el valor máximo estudiaremos la monotonía de la función con el signo de la primera derivada (B(x) es una función continua y derivable)

$$B'(x) = -2x + 4$$
$$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (Posible máximo)}$$

$-\infty < x < 2$	$2 < x < \infty$
$B'(x) > 0$	$B'(x) < 0$
B creciente	B decreciente

Por tanto en x =2 hay un máximo relativo. Ese es el valor del precio que maximiza los beneficios

c) Por cada kg de fresas el beneficio máximo que puede obtenerse, será el que resulta de calcular:

$$B(2) = [-x^2 + 4x - 3]_{x=2} = 1$$

Esto es, el beneficio máximo por kg es de 1 euro. Si se venden 10000 kg el beneficio será de

10000 · 1 = 10000 €