ESTADÍSTICA FEBRERO 2008 - EXAMEN RESUELTO

Opción A - Ejercicio 1

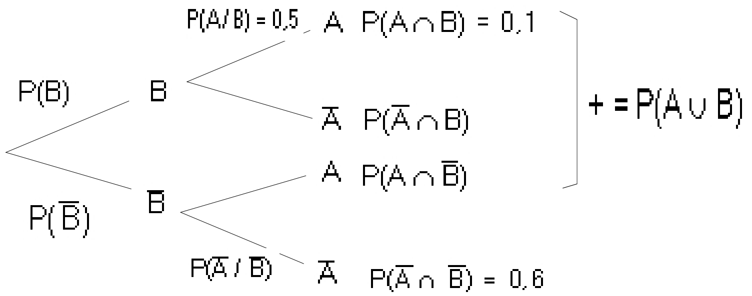
En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$P(A \cap B) = 0.1$, $P(A^c \cap B^c) = 0.6$, $P(A/B) = 0.5$.

a) Calcule P(B).
b) Calcule P(A U B).
c) ¿Son A y B independientes?

SOLUCIÓN:

Nos podemos ayudar de un diagrama de árbol en el que situamos los datos de partida:



En este diagrama hemos ubicado, además las probabilidades que se nos pide calcular.

a) Tenemos que:

$$P(B) \cdot P(A/B) = P(A \cap B)$$

por tanto:

$$\boxed{\mathbf{P(B)} = \frac{\mathbf{P(A/B)}}{\mathbf{P(A \cap B)}} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2}$$

b) Observando también el diagrama vemos que

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

y entonces:

$$\boxed{P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,6 = 0,4}$$

c) Para estudiar la dependencia de los sucesos A y B podemos calcular $P(A/\overline{B})$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$P(\overline{B}) \cdot P(\overline{A}/\overline{B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) \Rightarrow P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

y a partir de aquí:

$$P(A/\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}/\overline{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$$

Por último, puesto que

$$P(A/\overline{B}) = 0,25 \neq P(A/B) = 0,5$$

Concluimos que A y B son sucesos dependientes.

ESTADÍSTICA FEBRERO 2008 - EXAMEN RESUELTO

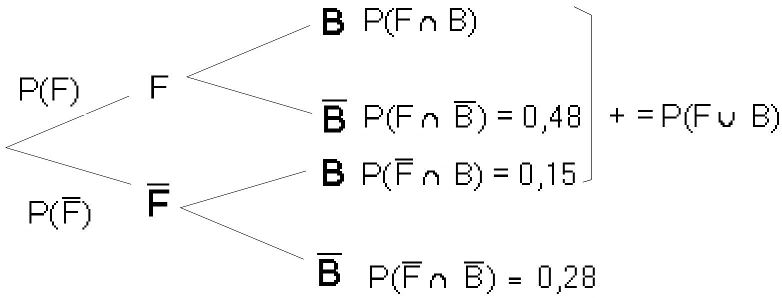
Opción A - Ejercicio 2

En un Instituto se pueden practicar dos deportes: fútbol y baloncesto. Se sabe que el 48% de los alumnos practica fútbol pero no baloncesto, que el 15% practica baloncesto pero no fútbol y que el 28% no practica ninguno de los dos. Si se toma, al azar, un alumno de ese Instituto, calcule la probabilidad de que:

a) Practique fútbol.
b) Practique alguno de los dos deportes.
c) No practique fútbol, sabiendo que practica baloncesto

SOLUCIÓN:

Nos podemos ayudar de un diagrama de árbol en el que situamos los datos de partida:



En este diagrama hemos ubicado, además las probabilidades que se nos pide calcular.

a) Es claro que $P(F\cap B)+P(F\cap \overline{B})+P(\overline{F}\cap B)+P(\overline{F}\cap \overline{B})=1$

$$P(F\cap B)=1-(P(F\cap \overline{B})+P(\overline{F}\cap B)+P(\overline{F}\cap \overline{B}))=1-(0{,}48+0{,}15+0{,}28)=0{,}09$$

Además sabemos que :

$$\boxed{P(F)=P(F\cap B)+P(F\cap \overline{B})=0{,}09+0{,}48=0{,}57}$$

b) Observando el diagrama vemos que la probabilidad de practicar alguno de los dos deportes es:

$$\boxed{P(F\cup B)=1-P(\overline{F}\cap \overline{B})=1-0{,}28=0{,}72}$$

c) Y por último, aplicando el teorema de Bayes podemos ver que:

$$\boxed{P(\overline{F}/B)=\frac{P(\overline{F}\cap B)}{P(\overline{F}\cap B)+P(F\cap B)}=\frac{0{,}15}{0{,}09+0{,}15}=0{,}625}$$

ESTADÍSTICA FEBRERO 2008 - EXAMEN RESUELTO

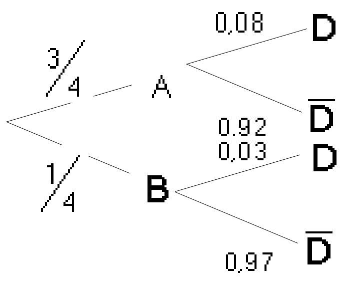
Opción A - Ejercicio 3

Una máquina A produce cada día el triple de piezas que otra máquina B. El 8 % de las piezas fabricadas por la máquina A son defectuosas, mientras que de las fabricadas por la máquina B sólo son defectuosas el 3 %. Calcúlese la probabilidad de que de un lote de 20 piezas extraídas aleatoriamente de la producción total:

a) Exactamente 5 sean defectuosas.

b) Al menos 3 sean defectuosas

SOLUCIÓN:
Si la máquina A produce el triple de piezas que la B, entonces de cada 4 piezas, 3 proceden de A y 1 de B. También necesitamos calcular la probabilidad total de que una pieza elegida al azar sea defectuosa. Para ello podemos ayudarnos del diagrama de árbol.



La probabilidad de que al elegir una pieza al azar sea defectuosa será:

$$P(D) = P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) = \frac{3}{4}\cdot 0{,}08 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}03 = 0{,}065$$

Se trata, por tanto, de una distribución binomial B(20; 0,065)

Usaremos: $\mathrm{P}(x = i) = \binom{n}{i}\cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

a) La probabilidad de encontrar 5 piezas defectuosas será:

$$\mathrm{P}(x = 5) = \binom{20}{5}\cdot (0{,}0675)^5 \cdot (1 - 0{,}0675)^{15} = 7{,}62\cdot 10^{-3}$$

b) Para calcular la probabilidad de encontrar al menos 3 piezas defectuosas la calcularemos utilizando el suceso contrario, que es encontrar dos o menos piezas defectuosas:

$$\mathrm{P}(x \geq 3) = 1 - (\mathrm{P}(x = 0) + \mathrm{P}(x = 1) + \mathrm{P}(x = 2))$$

$$\mathrm{P}(x = 0) = \binom{20}{0}\cdot (0{,}0675)^0 \cdot (1 - 0{,}0675)^{20} = 0{,}2472$$

$$P(x = 1) = \binom{20}{1} \cdot (0{,}0675)^{1} \cdot (1 - 0{,}0675)^{19} = 0{,}3578$$

$$P(x = 2) = \binom{20}{2} \cdot (0{,}0675)^{2} \cdot (1 - 0{,}0675)^{18} = 0{,}2461$$

$$\boxed{P(x \geq 3) = 1 - (0{,}2472 + 0{,}3578 + 0{,}2461) = 0{,}8511}$$

ESTADÍSTICA FEBRERO 2008 - EXAMEN RESUELTO

Opción A - Ejercicio 4

Los ingresos diarios de una empresa tiene una distribución normal, con media 20000 PTA y desviación típica 5000 PTA.

a corregido) Calcular el porcentaje de días en los que los ingresos son inferiores a 17500 PTA.

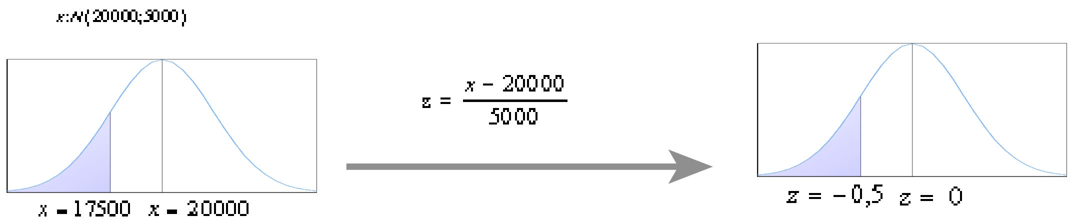
a) Calcular el porcentaje de días en los que los ingresos son inferiores a 175000

b) Calcular el porcentaje de días en los que los ingresos superan las 23000 PTA.

c) Calcular el porcentaje de días en los que los ingresos son superiores a 22500 e inferiores a 27500 PTA.

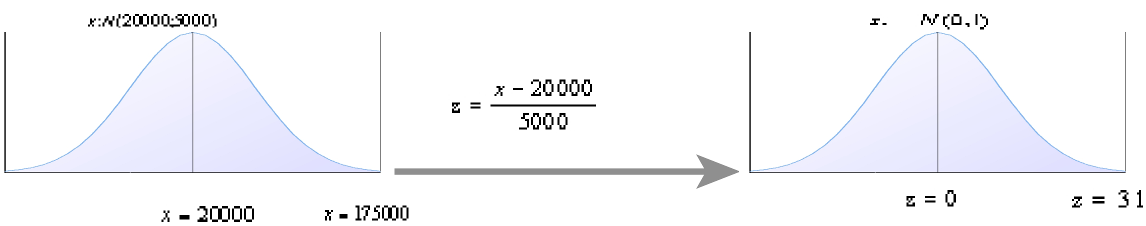
SOLUCIÓN:

a corregido)



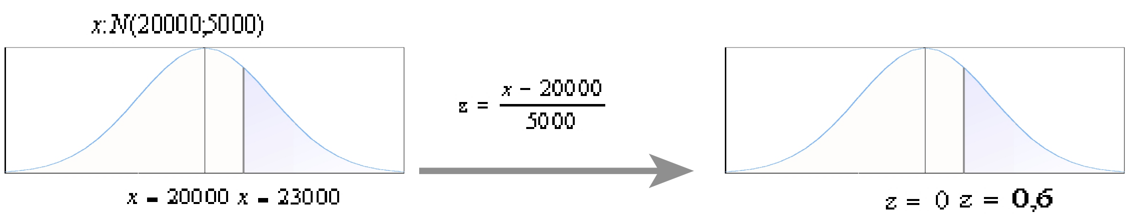
$$P(x \leq 17500) = P(z \leq -0{,}5) = P(z \geq 0{,}5) = 1 - P(z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}8511$$

a)



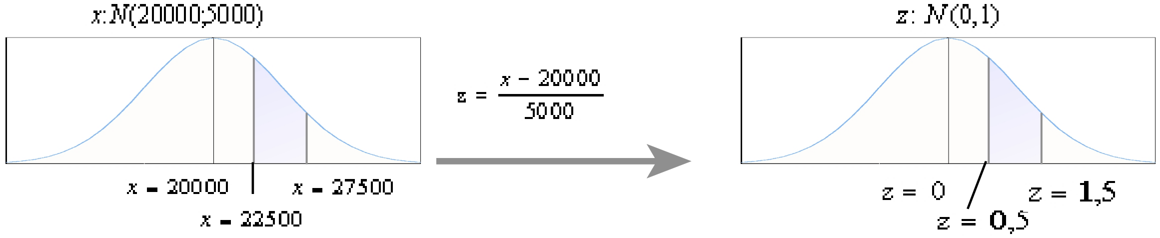
$$P(x \leq 175000) = P(z \leq 31) = 1$$

b)



$$P(x \geq 23000) = P(z \geq 0{,}6) = 1 - P(z \leq 0{,}6) - 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$$

c)



$$P(22500 \le x \le 27500) = P(0{,}5 \le z \le 1{,}5) = P(z \le 1{,}5) - P(z \le 0{,}5) = 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417$$

ESTADÍSTICA FEBRERO 2008 - EXAMEN RESUELTO

Opción B - Ejercicio 1

Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos:
A: "Obtener al menos dos veces cara" y B: "Obtener cara en el segundo lanzamiento".

a) Describa el espacio muestral asociado al experimento. Calcule P(A) y P(A U B).
b) Los sucesos A y B, ¿son independientes?, ¿son incompatibles?

SOLUCIÓN:

a)El espacio muestral es: $E = \{ccc,\ cc+,\ c+c,\ c++,\ +cc,\ +c+,\ ++c,\ +++\}$

Todos los elementos del espacio muestral son equiproblables.
Casos posibles: 8
Casos favorables al suceso A: 4 (ccc, cc+, c+c, +cc)

$$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

Casos favorables al suceso $A \cup B$: 5 (ccc, cc+, c+c, +cc, +c+)

$$P(A \cup B) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

b) Para estudiar si son sucesos dependientes comprobaremos si se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (*)$$

Calculamos en primer lugar P(B):

Casos favorables al suceso B: 4 (ccc, cc+, +cc, +c+)

$$P(B) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

Calculamos también $P(A \cap B)$:

Puesto que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Despejando:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

y entonces:

$$P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}625 = 0{,}375$$

Y finalmente, puesto que $P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$, concluimos que son suces
dependientes, ya que no se cumple el criterio enunciado en (*)

ESTADÍSTICA FEBRERO 2008 - EXAMEN RESUELTO

Opción B - Ejercicio 2

Un experimento aleatorio consiste en lanzar simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) Obtener dos unos.
b) Obtener al menos un dos.
c) Obtener dos números distintos.
d) Obtener una suma igual a cuatro

SOLUCIÓN:

a) Suceso A= "Obtener dos unos"

La siguiente tabla, que nos muestra el espacio muestral, nos será de utilidad:

Dado1 / Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2, 1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3, 1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4, 1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5, 1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6, 1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Casos favorables al suceso A: 1

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{36}$$

b) Suceso B = "Obtener al menos un dos"

Dado1 / Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2, 1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3, 1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4, 1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5, 1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6, 1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Casos favorables al suceso B: 11

$$P(B) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{11}{36}$$

c) Suceso C = "Obtener dos números distintos"

Es fácil comprobar que el suceso contrario de C ("Obtener dos números iguales"), tiene 6 casos favorables, por tanto:

$$P(C) = 1 - P(C) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36}$$

d) Suceso D = "Obtener una suma igual a cuatro"

Dado1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2, 1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3, 1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4, 1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5, 1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6, 1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Casos favorables al suceso D: 3

$$P(D) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

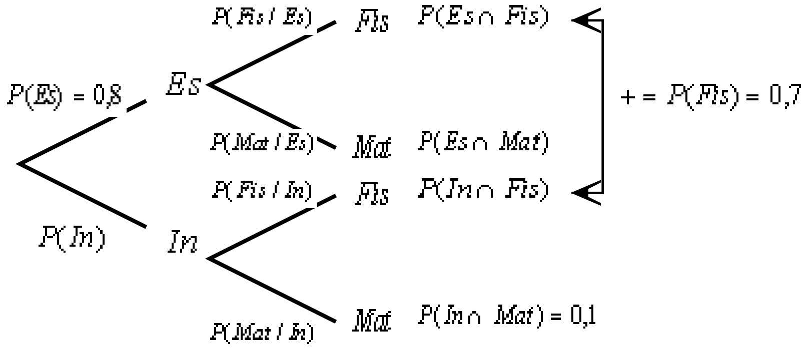
Opción B - Ejercicio 3

En una biblioteca sólo hay libros de física y de matemáticas, que están escritos en inglés o en español. Se sabe que el 70 % de los libros son de física, el 80 % de los libros están escritos en español y el 10 % son libros de matemáticas escritos en inglés.

a) Calcule qué tanto por ciento de los libros son de física y escritos en español.
b) Si cogemos un libro de física, ¿cuál es la probabilidad de que esté escrito en español?

SOLUCIÓN:

Nos podemos ayudar de un diagrama de árbol en el que situamos los datos de partida:



a) Para resolverlo completamos el diagrama hasta obtener el dato que nos piden.

En primer lugar: $P(In) = 1 - P(Es) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Por otra parte, de: $P(In) \cdot P(Mat / In) = P(In \cap Mat)$ obtenemos:

$$P(Mat / In) = \frac{P(Mat \cap In)}{P(In)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2}$$

Y como $P(Mat / In) + P(Fis / In) = 1$, tendremos que:

$$P(Fis / In) = 1 - P(Mat / In) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Y entonces:

$$P(In \cap Fis) = P(In) \cdot P(Fis / In) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$$

Finalmente:

$$P(Es \cap Fis) + P(In \cap Fis) = P(Fis)$$

Y por lo tanto:

$$P(Es \cap Fis) = P(Fis) - P(In \cap Fis) = 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}6$$

El 60% de los libros son de física y están escritos en español

b) Utilizamos el teorema de Bayes:

$$P(Es / Fis) = \frac{P(Fis \cap Es)}{P(Fis \cap Es) + P(Fis \cap In)} = \frac{0{,}6}{0{,}6 + 0{,}1} = 0{,}857$$

La probabilidad de que un libro de física esté escrito en español es de 0,857

ESTADÍSTICA FEBRERO 2008 - EXAMEN RESUELTO

Opción B - Ejercicio 4

En un famoso concurso de televisión basta con responder acertadamente a 15 preguntas para ganar 50 millones de pesetas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas, de las que sólo una es verdadera.

a) Determine la probabilidad de que un concursante que no sabe ninguna pregunta y responde al azar pueda ganar los 50 millones.
b) Determine la probabilidad de que un concursante con cultura media que sólo conoce las respuestas correctas de las 5 primeras preguntas, acierte las respuestas de las 10 últimas si éstas las contesta al azar.

SOLUCIÓN:

a)

- Como el concursante desconoce todas las respuestas, y responde al azar eligiendo una de 4, la probabilidad que tiene de acertar en cada una de las preguntas es de 1/4.
- La probabilidad que tiene de acertar en cada una de las preguntas no cambia a lo largo del concurso, que consistirá en repetir el mismo proceso 15 veces.
- La variable aleatoria que tenemos es el número de preguntas que se responden acertadamente.
- Se trata, por tanto, de una binomial B(15; 1/4)

$$P(x = 15) = \binom{15}{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{0} = 9{,}31 \cdot 10^{-10}$$

La probabilidad que tiene de acertar las 15 preguntas es prácticamente nula

b) Como el concursante conoce las cinco primeras preguntas, responderá al azar sólo las diez restantes, con lo cual, tenemos ahora una B(10, 1/4)

$$P(x = 10) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{0} = 9{,}54 \cdot 10^{-7}$$

La probabilidad que tiene de acertar las 15 preguntas, si sabe la respuesta de las primeras cinco, aunque algo mayor que en el apartado a), sigue siendo prácticamente nula.