Examen de Álgebra -Temas 1-2-3 **Mat. Aplicada a las Ciencias Sociales II**
Curso 2º de Bachillerato **Año 2008/2009**
A l u m n @ : ______________________________

1. Sean las matrices A y B definidas como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcula, si existe, B^{-1}
b) (1 punto) Halla una matriz X tal que verifique $XB = A + B$

SOLUCIÓN:

a) Para el cálculo de la matriz inversa utilizaremos el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1:F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

b) Para resolver la ecuación matricial, operamos por la derecha con B^{-1} en los dos miembros de la igualdad:

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = (A + B) \cdot B^{-1} \Rightarrow \quad X \cdot I = (A + B) \cdot B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (A + B) \cdot B^{-1}}$$

Por tanto:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y finalmente:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

2.- (3 puntos) La suma de las edades de tres personas es, en el momento actual, 73 años. Dentro de diez años la edad de la mayor de ellas será el doble de la edad de la persona más joven. Hace doce años la persona con edad intermedia tenía el doble de años que la más joven. Hallar las edades de las tres personas.

SOLUCIÓN:

Llamémosle x, y, z , a las edades de la persona mayor, intermedia y más joven, respectivamente.

Del enunciado del problema se deduce:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+x=73 \\ x+10=2(z+10) \\ y-12=2(z-12) \end{array}\right\} \rightarrow \textit{agrupando y simplificando} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=73 \\ x-2z=10 \\ y-2z=-12 \end{array}\right\}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones utilizaremos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 73 \\ 1 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 73 \\ 0 & -1 & -3 & -63 \\ 0 & 1 & -2 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 73 \\ 0 & -1 & -3 & -63 \\ 0 & 0 & -5 & -75 \end{array}\right)$$

Por tanto: $z=\dfrac{-75}{-5}=15$

$$y-2\cdot(15)=-12 \Rightarrow y=-12+2\cdot 15 \Rightarrow y=18$$

$$x=73-y-z=73-15-18=40$$

Con lo cual, las edades de las tres personas son 40, 18 y 15 años, respectivamente.

3.- (3 puntos) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x - y + z & = 1 \\ x - 3y - z & = 2 \\ 4x + 13y - z & = 17 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:

Aplicaremos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & 13 & -1 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 13 & -1 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3:F_3-4F_1]{F_2:F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 25 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:F_3-5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 24 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$z = \frac{24}{-12} = -2$$

$$y = \frac{-3-3z}{5} = \frac{-3+6}{5} = \frac{3}{5}$$

$$x = 2 + 3y + z = 2 - 2 + 3\frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

4.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) ¿Para qué valores de " a" la matriz tiene rango 3?
b) (1 punto) Calcula "a" para que se cumpla la ecuación: $|A - 5I| = 0$

SOLUCIÓN:

a) *Para que la matriz tenga rango 3 tendrá que tener determinante distinto de cero (si el determinante es cero sus filas o columnas serán linealmente dependientes y el rango sería entonces menor que tres).*

Resolvemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix} = (a + 0 + 18) - (9 - 2a + 0) = 3a + 9$$

Por lo tanto observamos que: $\begin{cases} si \ a = -3 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rang(A) \prec 3 \\ si \ a \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 \end{cases}$

La matriz tiene rango 3 para cualquier valor de "a" distinto de -3

b)

$$|A - 5I| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & a-5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow [16(a-5) + 18 + 0] - [-36 - 2(a-5) + 0] = 0$$

$$(16a - 80 + 18) - (-36 - 2a + 10) = 0 \Rightarrow 18a - 54 = 0$$

$$\boxed{a = \frac{54}{18} = 3}$$