Problemas contextualizados

La mosca común solamente vive si la temperatura media de su entorno está comprendida entre 4ºC y 36ºC. La vida en días, en función de la temperatura media *T*, medida en grados centígrados, viene dada por la función: $V(T) = \frac{-1}{16}(T^2 - 40T + 16), \quad T \in [4,36]$

a) **(1 punto)** Determine la vida máxima que puede alcanzar la mosca común.
b) **(1 punto)** Calcule la vida mínima e indique la temperatura media a la que se alcanza.
c) **(0.5 puntos)** Si sabemos que una mosca ha vivido 15 días, ¿a qué temperatura media ha estado el entorno donde ha habitado?

Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo t, medido en meses:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{100t - 250}{t + 5} & \text{si} \quad t > 5 \end{cases}.$$

a) **(0.5 puntos)** Estudie la continuidad de la función P.
b) **(0.75 puntos)** Estudie la derivabilidad de P en $t = 5$.
c) **(0.75 puntos)** Estudie la monotonía de dicha función e interprete la evolución del porcentaje de células afectadas.
d) **(0.5 puntos)** ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?

Una empresa ha realizado un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, que ha obtenido en los últimos 10 años. La función a la que se ajustan dichos beneficios viene dada por

$$B(t) = 2t^3 - 36t^2 + 162t - 6, \quad con \quad 0 \le t \le 10$$

a) **(0.8 puntos)** ¿Qué beneficios obtuvo al inicio del periodo ($t = 0$) y al final del décimo año ($t = 10$)?
b) **(1.7 puntos)** ¿En qué momentos se obtiene el máximo y el mínimo beneficio y cuáles fueron sus cuantías?

Cálculo de derivadas

Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) **(0.9 puntos)** $\boldsymbol{f(x) = \frac{2\cdot(1-3x)^2}{1+3x}}$
b) **(0.8 puntos)** $g(x) = (x^2 - x + 1)\cdot e^{5x}$
c) **(0.8 puntos)** $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$

Derivabilidad a trozos y con parámetros

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax - 12) & si \quad x < -1 \\ -x^2 + b(x-1) & si \quad x \ge -1 \end{cases}$$

a) **(1.5 puntos)** Halle los valores de a y b sabiendo que la función es derivable en $x = -1$
b) **(1 punto)** Para $a = 1$ y $b = -1$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -2$

(2.5 puntos) Determine los valores que han de tomar a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax-7 & \text{si} \quad x<1 \\ 4x-b & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$ sea derivable en R.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ 4-\dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a.

b) **(1 punto)** Para $a = 1$, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.

Continuidad a trozos con parámetros

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad 0\leq x\leq 2 \\ \dfrac{8x+a}{x-1} & si \quad x>2 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Determine el valor de a para que la función sea continua.

b) **(0.75 puntos)** ¿Para $a=-10$, es creciente la función en $x = 3$?

c) **(0.75 puntos)** Halle sus asíntotas para $a=-10$.

Continuidad

Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ -x^2+1 & \text{si} \quad 0<x<4. \\ x^2-8x+17 & \text{si} \quad x\geq 4 \end{cases}$

a) **(1.2 puntos)** Represente gráficamente la función f.

b) **(0.8 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $f'(1)$ y $f'(5)$.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x+4} & si \quad x<2 \\ x^3-3x^2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Determine y represente gráficamente sus asíntotas. Calcule el punto donde la gráfica de la función f corta al eje de ordenadas.

b) **(1 punto)** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=-3$.

Derivabilidad

Se considera la función f, definida a trozos por la expresión

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+x+6 & si \quad x\leq 2 \\ x+2 & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) **(0.5 puntos)** Estudie la continuidad de la función.

b) **(0.5 puntos)** Analice la derivabilidad de la función.

c) **(1.5 puntos)** Represéntela gráficamente, determinando los extremos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de corte con los ejes.

Se considera la función dada por $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x+2} & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.
b) **(1 punto)** Halle las ecuaciones de las asíntotas de esta función.

Estudio de una función polinómica

Se considera la función $f(x)=x^3-2x^2+x$.
a) **(1.3 puntos)** Halle el máximo, el mínimo y el punto de inflexión de la función.
b) **(0.6 puntos)** Calcule los puntos de corte con los ejes.
c) **(0.6 puntos)** Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisas $x=0$ y $x=1$.

Función polinómica con parámetros

a) **(1 punto)** Determine el valor de a para que sea continua en $x=-1$ la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & si \quad x\le -1 \\ x^3-3x^2+6x-2 & si \quad x>-1 \end{cases}$$

b) **(1.5 puntos)** Calcule los coeficientes b y c de la función $g(x)=x^3+bx^2+cx-2$ para que $(1,2)$ sea un punto de inflexión de g.

Sea la función $f(x)=-2x^3+a\cdot e^{-x}+b\cdot x-1$.
a) **(1.5 puntos)** Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en $x=0$ y que la gráfica de la función pasa por el punto $(0,0)$.
b) **(1 punto)** Para $a=0$ y $b=1$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$.

Interpretar datos de una función o su derivada

Sea $f(x)$ una función cuya función derivada, $f'(x)$, tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1,0)$ y $(5,0)$ y con vértice $(2,-4)$.
a) **(1 punto)** Estudie razonadamente la monotonía de $f(x)$.
b) **(0.5 puntos)** Determine las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$.
c) **(1 punto)** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$, sabiendo que $f(2)=5$.