Ejercicio 1

a) **(1 punto)** Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+3x}}; \qquad g(x) = \ln(1-5x) + e^{7x^2}$$

b) **(1 punto)** Estudia la derivabilidad de la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4x+7 & si \quad x \leq 3 \\ \dfrac{18}{x}+5 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:
a)

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+3x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (1+3x)^{\frac{1}{2}} - x^2 \cdot \frac{1}{2}(1+3x)^{\frac{-1}{2}} \cdot 3}{1+3x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1-5x} \cdot (-5) + e^{7x^2} \cdot 14x$$

b) Primero estudiamos la continuidad:

$(-\infty, 3)$: Se trata de una función continua y derivable por tratarse de un polinomio

$(3, \infty)$: Se trata de una suma de un polinomio con una función racional, que presenta una discontinuidad (división por cero en este caso) en el punto x=0, que no pertenece a la región de definición, por lo tanto, también es continua y derivable en este intervalo.

$x = 3$:

- $¿\exists f(3)?\ f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 + 7 = 10$
- $¿\exists \lim_{x\to 3} f(x)\,?$
  - $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x^2+4x+7) = 10$
  - $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} \left(\frac{18}{x}+5\right) = 11$

Los límites laterales son diferentes, por tanto no existe el límite en 3 y la función no es continua, por lo que concluimos que no es derivable en x = 3.

Conclusión: $f(x)\ es\ derivable\ en\ \mathbb{R} - \{3\}$

Ejercicio 2

a) **(1,25 puntos)** Calcula los valores de los parámetros a, b y c en la función

$$f(x) = ax^3 - bx + c,$$

sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un máximo en el punto (1,4)

SOLUCIÓN:

Como pasa por el origen de coordenadas se cumple que:

$$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0 - b \cdot 0 + c = 0 \Longrightarrow c = 0$$

También pasa por el punto (1,4):

$$f(1) = 4 \Rightarrow a \cdot 1 - b \cdot 1 + c = 4 \Longrightarrow a - b + c = 4$$

Y como tiene un máximo en ese punto se cumple que:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1 - b = 0 \Longrightarrow 3a - b = 0$$

Por tanto, hay que resolver el sistema dado por:

$$\left.\begin{array}{c} c = 0 \\ a - b + c = 4 \\ 3a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} c = 0 \\ a - b = 4 \\ 2a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} c = 0 \\ a = -2 \\ b = -6 \end{array}$$

Por tanto: $\boxed{a = -2; \quad b = -6; \quad c = 0}$

b) **(1,25 puntos)** Para a = b = c = 1 calcula la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión

SOLUCIÓN:

Calculamos primero el punto de inflexión, para ello anulamos la segunda derivada:

$$f(x) = x^3 - x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$
$$f''(x) = 6x$$

Que nos da:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0;$$

Por tanto, hay que calcular la recta tangente en el punto de coordenadas $\big(0, f(0)\big) = (0,1)$

Tenemos: $a = 0;$ $\quad f(a) = f(0) = 1;$ $\quad f'(a) = f'(0) = -1;$

Que sustituyendo en $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ nos da finalmente:

$$y - 1 = -1(x - 0) \Rightarrow y = 1 - x$$

Ejercicio 3

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$, calcula:

a) **(0,5 puntos)** Dominio, puntos de corte con los ejes y asíntotas
b) **(0,75 puntos)** Intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos
c) **(0,75 puntos)** Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión
d) **(1 punto)** Con los datos obtenidos, dibuja su gráfica

SOLUCIÓN:

a) Tenemos un cociente de polinomios, por lo tanto el dominio es R excepto los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

O sea:

$$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\,, 1\}}$$

Para el corte con el eje x resolvemos $f(x) = 0$:

$$\frac{2x^2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0;$$

Para el corte con el eje y se debe cumplir $x = 0$;

$$f(0) = \frac{2\cdot 0^2}{0^2-1} = 0$$

Con lo cual, la función corta a los ejes solamente en el punto (0,0) , que es el origen de coordenadas.

Punto de corte con ejes: (0,0)

Las asíntotas verticales las buscaremos en los ceros del denominador, por lo tanto, calcularemos los límites laterales en +1 y -1,:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} - \infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty$$

$\{x_n\}$	$\{f(x_n)\}$
-1,1	11,52
-1,01	101,502
-1,001	1001,5.

$\{x_n\}$	$\{f(x_n)\}$
-0,9	-8,52
-0,99	-98,50
-0,999	-998,5

$\{x_n\}$	$\{f(x_n)\}$
0,9	-8,52
0,99	-98,50
0,999	-998,5

$\{x_n\}$	$\{f(x_n)\}$
1,1	11,52
1,01	101,502
1,001	1001,5.

Comprobamos que, efectivamente, hay asíntotas verticales en -1 y +1. Sus ecuaciones son:

$$\boxed{x = -1 \quad y \quad x = 1}$$

Para las asíntotas horizontales calculamos los límites en ±∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}(IND);\ \text{ Para resolver dividimos por } x^2 \text{ numerador y denominador:}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{1-0}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}(IND);\ \text{ Para resolver dividimos por } x^2 \text{ numerador y denominador:}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{1-0}=2$$

Por tanto, la asíntota horizontal, válida tanto en +∞ como en -∞ es la recta dada por:

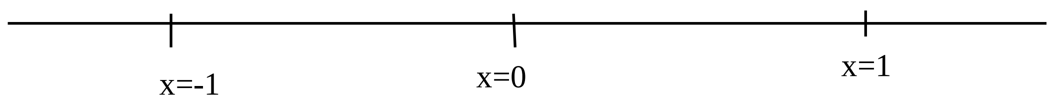
$$\boxed{y=2}$$

b) Para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos relativos, utilizaremos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x^2-1)-2x^2\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\quad (*)$$

Esta función puede cambiar de signo en los ceros del numerador (ceros de la función) o en los ceros del denominador (discontinuidades). El numerador se anula en x=0, y ya hemos visto anteriormente que el denominador lo hace en x = ±1, por tanto obtenemos las siguientes regiones donde el signo permanece constante:

$f'(-2)=\frac{8}{9}>0$ $\quad$ $f'(-0{,}5)=\frac{2}{0{,}5}>0$ $\quad$ $f'(0{,}5)=\frac{-2}{0{,}5}<0$ $\quad$ $f'(2)=\frac{-8}{9}<0$



Por tanto:
$$\begin{cases} f(x)\ es\ creciente\ en\ (-\infty,-1)\cup(-1,0) \\ f(x)\ \ es\ decreciente\ en\ (0,1)\cup(1,\infty) \\ f(x)\ tiene\ un\ máximo\ relativo\ en\ x=0\ (el\ valor\ del\ máximo\ es\ f(0)=0) \end{cases}$$

c) Para el estudio de la curvatura y puntos de inflexión utilizaremos el signo de $f''(x)$. Derivando una segunda vez en la expresión (*) obtenemos:

$$f''(x) = \frac{-4\cdot(x^2-1)^2 - (-4x)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

Podemos comprobar que el denominador no se anula nunca ya que la ecuación

$$12x^2+4=0 \quad (**)$$

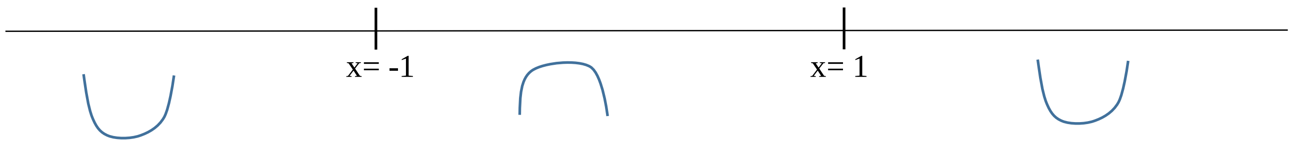
no tiene solución, por tanto $f''(x)$ nunca se anula y no hay puntos de inflexión.

Para el denominador obtenemos

$$(x^2-1)^3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Con lo cual nos quedan las siguientes regiones de signo constante para $f''(x)$

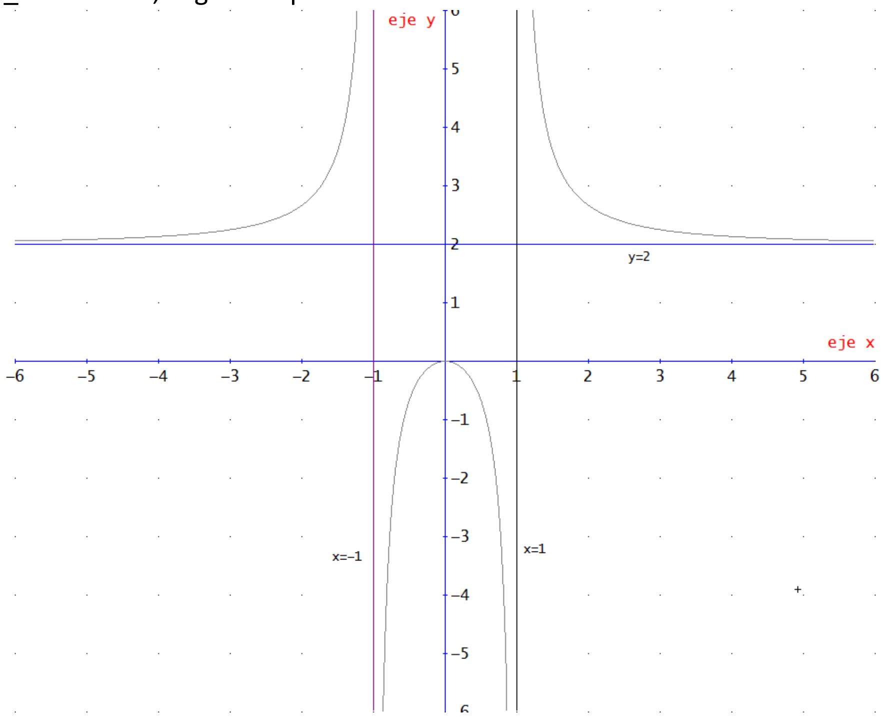
$f''(-2) = \frac{52}{27} > 0$ $\qquad$ $f''(0) = \frac{4}{-1} < 0$ $\qquad$ $f''(2) = \frac{52}{27} > 0$



Por tanto:

f(x) es cóncava vista desde arriba en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
f(x) es convexa vista desde arriba en $(-1,1)$
f(x) no tiene ningún punto de inflexión, ya que la segunda derivada no se hace nunca cero (**)

d) _Finalmente, la gráfica quedaría:



Ejercicio 4

Los beneficios en miles de euros, B, que obtiene una empresa dependen del gasto en publicidad en miles de euros, x, según la siguiente función:

$$B(x) = \begin{cases} 4x + 10 & si \quad 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{50x + 80}{2x + 1} & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

a) **(1 punto)** Justifica que B es una función continua
b) **(1 punto)** ¿A partir de qué gasto en publicidad disminuye el beneficio? ¿Cuál es el máximo beneficio? ¿Para qué valor de gasto en publicidad se alcanza?
c) **(0,5 puntos)** Calcula la asíntota horizontal e interprétala en el contexto del problema

SOLUCIÓN:

a) Para el estudio de la continuidad consideramos tres casos:

1. $x \in [0,5)$

   Se trata de una función polinómica, así que tenemos garantizada la continuidad en este intervalo.

2. $x \in [5, \infty)$

   Se trata de un cociente de funciones polinómicas, cuyo denominador se anula en $x = {-1}/{2}$, que no pertenece al intervalo de definición, por lo tanto, también es continua en este intervalo.

3. $x = 5$

   Para comprobar la continuidad en este punto aplicamos la definición

   - ¿ $\exists B(5)$?

     Respuesta: $B(5) = \frac{50 \cdot 5 + 80}{2 \cdot 5 + 1} = \frac{330}{11} = 30$

   - ¿ $\exists \lim_{x \to 5} B(x)$?

     Respuesta (calculamos los límites laterales):

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 5^-} B(x) &= \lim_{x \to 5} (4x + 10) = 30 \\ \lim_{x \to 5^+} B(x) &= \lim_{x \to 5} \left(\frac{50x + 80}{2x + 1}\right) = 30 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 5} B(x) = 30$$

   - ¿ $f(5) = \lim_{x \to 5} B(x)$?

     Respuesta: Por los apartados anteriores se observa que se cumple, por tanto *B(x)* es continua en *x* = 5 .

Conclusión: *B(x)* es continua en todo su dominio de definición

b) Para este apartado estudiamos la monotonía y los extremos relativos. Para ello utilizamos la primera derivada:

$$B'(x) = \begin{cases} 4 & si \quad 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{-30}{(2x+1)^2} & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

Es directo comprobar que ***B'(x)* es positiva en [0, 5)**, y **negativa en (5, ∞)**, mientras que en ***x* = 5 no está definida** (ya que pasa de tomar un valor positivo a la izquierda a un valor negativo a la derecha, lo que nos da a entender que hay un vértice o punto anguloso en *x* = 5), aun así, hemos visto anteriormente que *B(x)* es continua en x = 5

Gráficamente:

$B'(x) > 0$ $\quad$ $\nexists B'(5)$ $\quad$ $B'(x) < 0$

x = 0 $\quad$ x = 5

Por tanto:

El beneficio disminuye a partir de un gasto en publicidad de 5000 €
El máximo beneficio se consigue gastando en publicidad 5000 € (ya que hay un máximo en *x* = 5)
Este beneficio máximo es de 30000 € (ya que *f* (5) = 30

c) La única asíntota horizontal que existe es en +∞.

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{50x+80}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad (Indeterminación)$$

Para resolver la indeterminación dividimos por la máxima potencia de x y obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{50+\frac{80}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{50}{2} = 25$$

Que en el contexto del problema podemos interpretar de la siguiente manera:

Cuando aumentamos mucho la inversión en publicidad, los beneficios se acercan cada vez más a 25000 €