EJERCICIO 1.

$$f(x) = (2x^2-1)^3 \, L(x^4).$$

$$f'(x) = \left[(2x^2-1)^3\right]' \cdot L(x^4) + (2x^2-1)^3 \cdot \left[L(x^4)\right]'$$

$$f'(x) = 3(2x^2-1)^2 \cdot 4x \cdot L(x^4) + (2x^2-1)^3 \cdot \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3$$

$$f'(-1) = 3(2(-1)^2-1)^2 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot L((-1)^4) + (2(-1)^2-1)^3 \cdot \frac{1}{(-1)^4} \cdot 4(-1)^3$$

$$f'(-1) = 3 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot (+4) \cdot (-1)$$

$$f'(-1) = -4$$

Tiene signo negativo, lo que quiere decir que f es decreciente en $x = -1$.

$$g(x) = \frac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$$

$$g'(x) = \frac{\left(e^{-2x+x^2}\right)' \cdot (x^2+1) - e^{-2x+x^2} \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^{-2x+x^2} \cdot (-2+2x) \cdot (x^2+1) - e^{-2x+x^2} \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(0) = \frac{e^0 \cdot (-2+2 \cdot (0)) \cdot (0^2+1) - e^0 \cdot 2 \cdot (0)}{1^2}$$

$$g'(0) = \frac{e^0 \cdot (-2) \cdot (1) - e^0 \cdot 0}{1} = -2$$

También tiene signo negativo, por tanto g es decreciente en $x = 0$

EJERCICIO 2

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para comprobar la derivabilidad primero es necesario garantizar la continuidad. Para ello consideramos tres casos

1) $x \in (-\infty, 1)$

2) $x \in (1, \infty)$

3) $x = 1$

1) Continuidad en $(-\infty, 1)$: En este tramo la función es un polinomio, por tanto es continua

2) en $(1, \infty)$ tenemos un cociente de polinomios, cuyo denominador se anula en $x=0$, que no pertenece al intervalo, por tanto, $f(x)$ también es continua en este intervalo

3) continuidad en $x=1$. comprobamos los siguientes requisitos:

I) ¿$\exists f(1)$? $\quad f(1) = (1+1)^2 = 4$

II) ¿$\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$? : $\quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x+1)^2 = 4$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{4}{x} = 4$

coinciden, por tanto $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

III $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

Por tanto concluimos que $f(x)$ es continua en $x=1$.

Además, de (1), (2), y (3) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

Pasamos ahora a la derivabilidad:

Donde exista la derivada vendrá dada por la función

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -\dfrac{4}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Igual que antes, distinguimos tres casos:

1) Derivabilidad en $(-\infty, 1)$. Está asegurada, por tratarse de un polinomio, que es una función derivable

2) Derivabilidad en $(1, \infty)$. Tenemos un cociente de polinomios que será derivable excepto en los ceros del denominador. El denominador se anula en $x=0$, que no pertenece al intervalo, por tanto $f(x)$ derivable en este intervalo.

3) Derivabilidad en $x=1$. Comprobamos que existen las derivadas laterales y que coinciden:

$$\left.\begin{aligned} f'(1^-) &= \big[2(x+1)\big]_{x=1} = 2(1+1) = 4 \\ f'(1^+) &= \left[-\frac{4}{x^2}\right]_{x=1} = \frac{-4}{1^2} = -4 \end{aligned}\right\} \text{son distintas, no es derivable en } x=1$$

Por tanto:

$$\boxed{f(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{1\}}$$

b) Para la monotonía estudiamos signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si } x \leq 1 \\ -\dfrac{4}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 1)$

$2(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

$f'(-2) = -2$ $\quad$ $f'(0) = 2$

-1 $\quad$ 1

por tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ decreciente en } (-\infty, -1) \\ f \text{ creciente en } (-1, 1) \\ \text{mínimo relativo en } x = -1 \end{array}}$$

En el intervalo $(1, \infty)$

$-\dfrac{4}{x^2}$ es siempre negativa en este intervalo, por tanto:

$$\boxed{f \text{ decreciente en } (1, \infty)}$$

En $x = -1$ no está definida la derivada (no es derivable en este punto), pero el hecho de que sea continua, creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de este punto nos permite razonar que hay un $\boxed{\text{máximo relativo en } x = 1.}$

Ejercicio 3

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x+b}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Para la derivabilidad distinguiremos 3 casos:

I) en $(-\infty, 2)$
II) en $(2, \infty)$
III) en $x = 2$.

I) Se trata de un polinomio, por tanto es continua y derivable en este intervalo

II) En $(2, \infty)$ la función está definida por un cociente de polinomios, cuyo denominador se anula en $x = 1$, que no pertenece al intervalo, por tanto, continua y derivable en $(2, \infty)$

III) En $x = 2$.

Continuidad

1) ¿$\exists f(2)$? $\quad f(2) = 2^2 + a \cdot 2 = 4 + 2a$

2) ¿$\exists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$? $\quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+b}{x-1} \right) = \dfrac{2+b}{1} = 2 + b \end{cases}$

3) ¿$f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

Para que sea continua debe cumplirse que $4 + 2a = 2 + b$, o sea:

$$\boxed{2a - b = -2} \quad (*)$$

derivabilidad.

La derivada, si existe, viene dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \dfrac{-1-b}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

por tanto, para que sea derivable en $x = 2$ deberá cumplir:

$$f'(2^-) = f'(2^+)$$

Que en nuestro caso quedaría:

$$\left[2x + a\right]_{x=2} = \left[\frac{-1-b}{(x-1)^2}\right]_{x=2}.$$

$$4 + a = -1 - b$$

$$\boxed{a + b = -5} \quad (\#)$$

Uniendo las ecuaciones $(*)$ y $(\#)$ tenemos:

$$\begin{array}{l} 2a - b = -2 \\ a + b = -5 \\ \hline 3a \quad = -7 \Rightarrow a = \dfrac{-7}{3} \end{array}$$

$$b = -5 - a = -5 + \frac{7}{3} = \frac{-8}{3}$$

Por tanto: para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio debe ser

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \dfrac{-7}{3} \\ b = \dfrac{-8}{3} \end{array}}$$

b) Haciendo $a=2$ y $b=3$ en la expresión de f y f' tenemos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si } x\leq 2 \\ \dfrac{x+3}{x-1} & \text{si } x>2 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x\leq 2 \\ \dfrac{-4}{(x-1)^2} & \text{si } x>2. \end{cases}$$

La ecuación de la recta tiene la forma

$$y-f(a) = f'(a)(x-a)$$

En nuestro caso:

$$a=1$$
$$f(a)=f(1)=1^2+2(1)=3$$
$$f'(a)=f'(1)=2(1)+2=4$$

Por tanto la ecuación de la recta tangente en el punto de abcisa $x=1$ es:

$$\boxed{y-3 = 4(x-1)}$$

EJERCICIO 4

a) Al comienzo de la emisión habrá $S(6)$ personas

$$S(6) = 660 - 231\cdot 6 + 27\cdot 6^2 - 6^3 = 660 - 1386 + 972 - 216 = 30$$

$\boxed{\text{Al comienzo de la emisión la audiencia es del } 30\%}$

Al cierre la audiencia será de $S(12)$ %

$$S(12) = 660 - 231\cdot 12 + 27\cdot 12^2 - 12^3 = 48.$$

$\boxed{\text{Al cierre la audiencia es del } 48\%}$

b) Estudiamos monotonía y extremos relativos en $[6, 12]$, para ello consideramos $S'(t)$

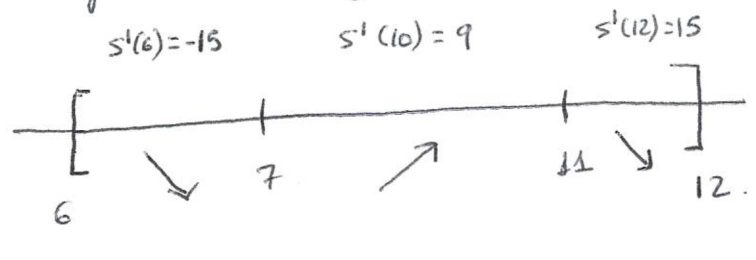
$$S'(t) = -231 + 54t - 3t^2 \qquad 6 \leq t \leq 12$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow -231 + 54t - 3t^2 = 0$$

$$3t^2 - 54t + 231 = 0$$

$$t = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4\cdot 3\cdot 231}}{6} = \frac{54 \pm 12}{6} = \left\langle \begin{array}{l} 7 \\ 11 \end{array}\right.$$

Las regiones de signo constante serán:



S creciente i $(7, 11)$

S decreciente $(6, 7) \cup (11, 12)$

Calculamos las coordenadas del mínimo $(x = 7)$ y del máximo relativo $(x = 11)$

$$S(7) = 660 - 231\cdot 7 + 27\cdot 7^2 - 7^3 = 23$$

$$S(11) = 660 - 231\cdot 11 + 27\cdot 11^2 - 11^3 = 55.$$

Podemos concluir por tanto:

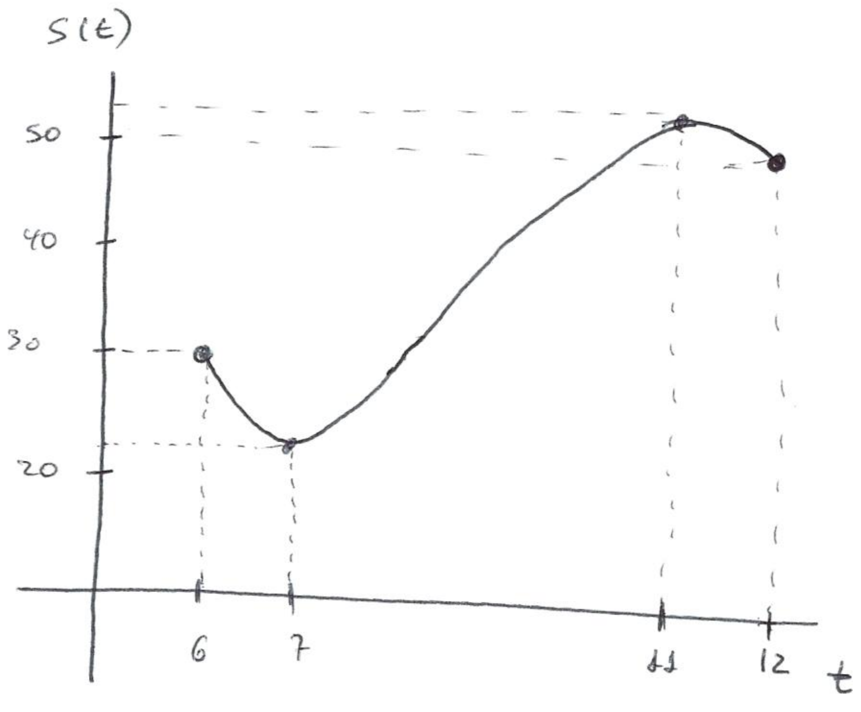
S es creciente en $(7, 11)$

S es decreciente en $(6,7) \cup (11,12)$

Tiene un mínimo relativo en $(7, 23)$

Tiene un máximo relativo en $(11, 55)$.

Para tener en cuenta los valores de los extremos lo más sencillo es hacer un esbozo de la gráfica con los datos que tenemos:



Por tanto:

La audiencia mínima es del 23% y se alcanza a las 7.

La audiencia máxima es del 55% y se alcanza a las 11