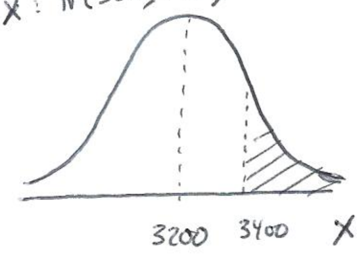
Ejercicio 3

a) Se trata de calcular $P(x \geq 3{,}4 \text{ kg})$ en una distribución normal de media 3200 g y desviación típica 125 g

$X : N(3200, 125)$

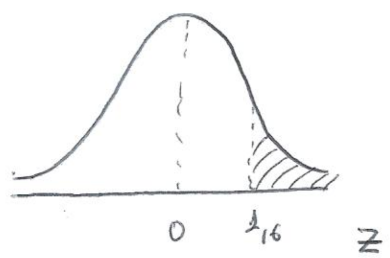


tipificamos $\longrightarrow$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

x	z
3400	1,6

$N(0,1)$



Por tanto: $P(x \geq 3400) = P(z \geq 1{,}6) = 1 - P(z \leq 1{,}6)$

Consultando la tabla $N(0,1)$: $P(z \leq 1{,}6) = 0{,}9452$

y finalmente:

$$\boxed{P(x \geq 3400) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548}$$

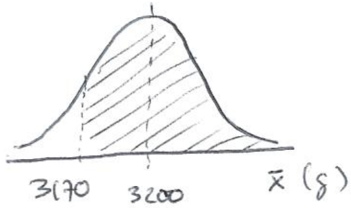
La probabilidad de que un recién nacido pese más de 3,4 kg es de 0,0548

b) Seguirán una distribución normal, de media $\mu_{\bar{x}} = \mu = 3200$ g y desviación típica $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{125}{\sqrt{100}} = 12{,}5$ g

$$\boxed{\bar{x} : N(3200, 12.5)}$$ (en gramos)

c) Hay que calcular $P(\bar{x} > 3170 \text{ g})$ en una $N(3200, 12.5)$

$N(3200, 12.5)$

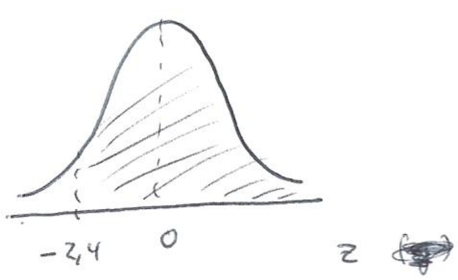


tipificamos $\longrightarrow$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$\bar{x}$	z
3170	-2.4

$N(0,1)$



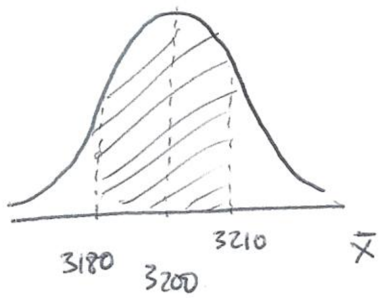
$$P(\bar{x} > 3170g) = p(z \geq -2{,}4) = p(z \leq 2{,}4) = 0{,}9918$$

Por tanto:

> La probabilidad de que la media de una muestra de 100 recién nacidos sea superior a 3,170 kg es 0,9918

d) Se trata de calcular $P(3180\,g < \bar{x} < 3210\,g)$ en una $N(3200, 12{,}5)$

$N(3200, 12.5)$

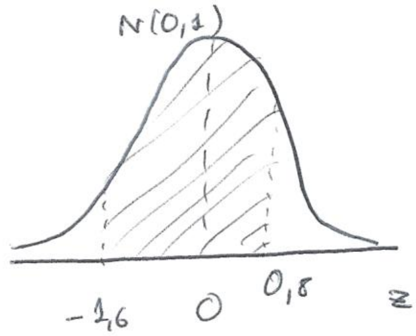


tipificamos $\longrightarrow$

$$z = \frac{\bar{x} - 3200}{12.5}$$

$\bar{x}$	z
3180	$-1{,}6$
3210	$0{,}8$

$N(0,1)$



$$P(3180g < \bar{x} < 3210\,g) = P(-1{,}6 < z < 0{,}8) = P(z < 0{,}8) - P(z < -1{,}6)$$

$$= P(z < 0{,}8) - [1 - P(z < 1{,}6)]$$

Consultando en la tabla $N(0,1)$ tenemos:

$$P(3180\,g < \bar{x} < 3210\,g) = 0{,}7881 - [1 - 0{,}9452] = 0{,}7333$$

Por tanto:

> La probabilidad de que la media de la muestra de 100 recién nacidos esté entre 3,180 kg y 3,210 kg es 0,7333

Ejercicio 4

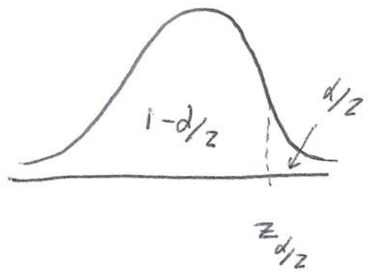
a) Hay que calcular un intervalo de confianza para la proporción muestral, al 99% de confianza, donde:

$$n = 200 \qquad \bar{p} = \frac{16}{200} = \frac{2}{25} \qquad 1-\alpha = 0{,}99$$

Cálculo de $z_{\alpha/2}$:

$$1-\alpha = 0{,}99$$

$$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$$



$z_{\alpha/2}$ cumple que $p(z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995$.

consultando la tabla $N(0,1)$ $z_{\alpha/2} = 2{,}57$

El intervalo viene dado por:

$$\left(\bar{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \,,\; \bar{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \right)$$

Sustituyendo todo:

$$\left(\frac{2}{25} - 2{,}57 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{25}\left(1-\frac{2}{25}\right)}{200}} \,,\; \frac{2}{25} + 2{,}57\sqrt{\frac{\frac{2}{25}\left(1-\frac{2}{25}\right)}{200}} \right)$$

$$\left(\frac{2}{5} - 0{.}0493 \,,\; \frac{2}{5} + 0{.}0493 \right)$$

$$(0{.}3507 \,,\; 0{.}4493)$$

Teniendo en cuenta que el error cometido es

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad \text{(ya calculado)}$$

Podemos concluir que:

"El intervalo de confianza para la proporción de vasos defectuosos al 99% es (0.3507, 0.4493) y el error cometido en la estimación es 0.0493"

b) Se trata de calcular el valor mínimo de n para el que se cumple:

$$z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} < 0.03$$

despejando:

$$n > \left(\frac{z_{\alpha/2}}{0.03}\right)^2 \left(\bar{p}(1-\bar{p})\right)$$

Sustituyendo:

$$n > \left(\frac{2.57}{0.03}\right)^2 \left(\frac{2}{25}\left(1-\frac{2}{25}\right)\right)$$

$$n > 540.13$$

Por tanto:

"Para que el error máximo sea de un 3% hay que tomar un tamaño mínimo para la muestra de 541 vasos"

Ejercicio 2

Los sucesos son: E = Tener estudios

T = Tener trabajo

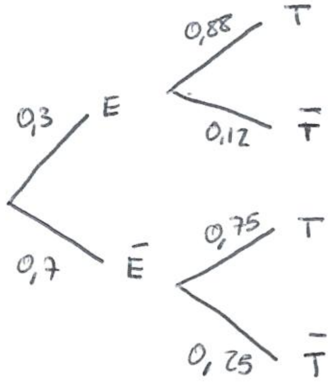
Datos:

$P(E) = 0{,}3$

$P(\bar{T}/E) = 0{,}12$

$P(\bar{T}/\bar{E}) = 0{,}25$

Poniendo estos datos en un diagrama de árbol y completando los sucesos contrarios tenemos:



$\rightarrow P(E \cap T) = 0.3 \cdot 0.88 = 0.264$

$\rightarrow P(E \cap \bar{T}) = 0.3 \cdot 0.12 = 0.036$

$\rightarrow P(\bar{E} \cap T) = 0.7 \cdot 0.75 = 0.525$

$\rightarrow P(\bar{E} \cap \bar{T}) = 0.7 \cdot 0.25 = 0.175$

a) $P(\bar{T}) = P(E \cap \bar{T}) + P(\bar{E} \cap \bar{T}) = 0{,}036 + 0.175 = 0.211$

$\boxed{\text{"El 21,1\% de la población no tiene trabajo"}}$

b) Hay que calcular $P(E/T)$. Utilizamos el teorema de Bayes

$$P(E/T) = \frac{P(E \cap T)}{P(E \cap T) + P(\bar{E} \cap T)} = \frac{0.264}{0.264 + 0.525} = 0.335$$

$\boxed{\text{"La probabilidad de que un trabajador tenga estudios es de 0,335"}}$

c) Buscamos $P(E/\bar{T})$. De nuevo T. Bayes

$$P(E/\bar{T}) = \frac{P(E \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0.036}{0.036 + 0.175} = 0.171$$

"La probabilidad de que tenga estudios alguien que no tiene trabajo es 0,171"

Ejercicio 3 bis

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{100 + 150 + 90 + 70 + 75 + 105 + 200 + 120 + 80}{9} = 110$$

El tamaño de la muestra es $n = 9$

Calculamos $z_{\alpha/2}$:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$$

$z_{\alpha/2}$ es tal que $P(z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$

Consultando en la tabla $N(0,1)$ vemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza para la media viene dado por

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \ \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Sustituyendo:

$$\left(110 - 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{9}} , \ 110 + 1{,}96 \ \frac{12}{\sqrt{9}} \right)$$

$$(102.16 , \ 117.84)$$ (en pesetas)

"El intervalo de confianza al 95% para el gasto medio semanal en fotocopias por estudiante es (102.16 , 117.84) en pesetas"